数理解析研究所講究録
497巻 1983年 158-165

函数等式と無限階微分方程式系

京大 数研
河合隆裕

ζ-函数の特徴付けに関する Hamburger の古典的な結果，即ち，極の位置その他に関する然るべき条件を満たす2つのディリクレー級数

$$Z_A(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s \quad 及び \quad Z_B(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu/\nu^s$$

が ζ-函数の満たす函数等式，即ち，

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z_A(s)/\pi^{s/2} = \Gamma((1-s)/2)\,Z_B(1-s)\Big/\pi^{(1-s)/2}$$

を満たすならば，$Z_A(s)=Z_B(s)$ であり，それは，而も，$\zeta(s)$ の定数倍である，というのは，如何にも不思議な結果である。尤も，最近の Ehrenpreis - Kawai [1] の結果を用いれば，結局の所，それは，"$\mathbb{Z}^n_x$ に台を持つ超函数のフーリエ像も亦，$\mathbb{Z}^n_\xi$ に台を持つならば，それは，本質的には，ポアソンの和公式に現われる超函数 $\Delta(x) \underset{def}{=} \sum_{m\in} \delta(x-m)$ に限る，" もう少し精確に言えば，"それは

$P(x, D_x)\Delta(x)$ （Pは多項式係数の微分作用素）である" と云う事実に帰着され得る。では、より一般に、Hecke [2] によって扱われた級数についてもそのような考察は可能であろうか？と問うのは自然である。例えば、最も簡単な場合として、虚の二次体に付随するツェータ函数に対しても同様のことが成立するであろうか？ この場合には、実は、Grössencharacter 付きのζ迄こめて、即ち

$$Z_A^{l}(s) = \sum_{\substack{(m,n)\\ \neq(0,0)}} a_{m,n}\frac{\exp(\sqrt{-1}\, l \arg(m+\sqrt{-1}\,n))}{(m^2+n^2)^s} \qquad (l\in\mathbb{Z})$$

を対象として議論をすることが必要と思われる。([1]) 尤も、こう言うと、直ちに、Hecke [2] は $l=0$ のみで Hamburger 型の結果を出しているではないか、と云う反論が出るものと思われる。これは、実は、Hecke [2] に於いては、$Z_A(s)=Z_B(s)$, 即ち $a_{m,n}=b_{m,n}$ （$(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{0\}$）と云う付帯条件を課していることに拠る。而も、Hecke 自身が [3] に於いて Hamburger の

定理の別証明を与えているだけに、この付帯条件の重要性についての言及が [2] に見当らないのは、解析的には、稍々奇異の感がある。勿論、保型函数論と云う観点からすれば $Z_A(s)=Z_B(s)$ と云うのは自然な仮定で、Hamburger 的な問題意識は寧ろ curiosity とも言えよう。併し、ζ から ϑ に移ってみると、Hamburger 的な問題意識も亦自然な物と思われる。実際、佐藤先生による極めて重要な指摘"ϑ函数の特徴付けは局所的に可能である"は、以下に見るように Hamburger 型の物である。

今 $h_A(\tau)=\sum_{\nu} a_\nu \exp(\pi\sqrt{-1}\,\nu^2\tau)$,

$$h_B(\tau)=\sqrt{\tau}\left(\sum_{\nu} b_\nu \exp(\pi\sqrt{-1}\,\nu^2\tau)\right)$$

(但し $|a_\nu|,\ |b_\nu|\leqq C|\nu|^M$ $(C, M>0)$ として置く。)
なる2つのフーリエ級数を考える。この時、少くとも形式的には、

$$\left[\frac{d}{d\tau}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\pi\sqrt{-1}\,\nu^2}\frac{d}{d\tau}\right)\right]h_A(\tau)=0$$

及び

$$\left(\tau\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{2}\right)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\pi\sqrt{-1}\,\nu^2}\left(\tau^2\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{2}\tau\right)\right)h_B\left(-\frac{1}{\tau}\right)=0$$

を得る。更に，形式的に $\sinh z$ に対する無限積展開を用いれば

(1) $$\left(\pi\sqrt{-1}\frac{d}{d\tau}\right)^{1/2}\sinh\left(\pi\sqrt{-1}\frac{d}{d\tau}\right)^{1/2}h_A(\tau)=0$$

及び

(2) $$\left(\tau\frac{d}{d\tau}+\frac{1}{2}\right)\frac{\sinh\sqrt{\pi\sqrt{-1}\left(\tau^2\frac{d}{d\tau}+\frac{\tau}{2}\right)}}{\sqrt{\pi\sqrt{-1}\left(\tau^2\frac{d}{d\tau}+\frac{\tau}{2}\right)}}h_B\left(-\frac{1}{\tau}\right)=0$$

を得る。ここで，若し函数等式

(3) $$h_B\left(-\frac{1}{\tau}\right)=h_A(\tau)\quad(\operatorname{Im}\tau>0)$$

を要請すれば

(4) $$Q_1h(\tau)=Q_2h(\tau)=0$$

を得る。但しここで Q_1 (resp., Q_2) は (1) (resp., (2)) に現われる微分作用素。さて，ここで $\sinh z$ の無限級数展開を思い出せば，例えば

$$(5) \qquad Q_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \left(\pi\sqrt{-1}\frac{d}{d\tau}\right)^{j+1}$$

となる。ここ迄の所、形式的な議論をして来たが(5)のように書いてみると容易に確かめ得るように微分作用素の無限級数 Q_1 は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ から $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ への層準同型を与える。即ち $Q_1 h(\tau)=0$ と云う方程式は、局所的に意味を持つ。$Q_2 h(\tau)=0$ についても同様である。而も、(4)の共通解は高々1次元であることも示し得る。従って古典的なϑ函数の場合、(3)と云う大域的な関係式を(4)と云う局所的な関係式に置き換えてその特徴付けを与えることが出来る。

尚、ここで、Q_1, Q_2 が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ から $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ への層準同型を与えると云う条件は極めて厳しい。例えば、

$$\vartheta(\tau_1, \tau_2) \underset{\text{def}}{=} \sum_{(m_1, m_2)} \exp\left(\pi\sqrt{-1}\left(\tau_1 m_1^2 + \tau_2 m_2^2\right)\right)$$

について類似の議論が可能であることは勿論であるが、$\vartheta(\tau_1, \tau_2)\big|_{\tau_1=\tau_2}$ については多分不可能であ

ろうと思われる。従って，このような良い無限階微分方程式系による解析が可能なフーリエ級数は Hecke [2] で扱われている物の内，極めて限られた物である。逆に，無限階微分方程式系によって統制される函数は，"ϑに近い"非常に良い保型函数を与えると期待できる，とも言えよう。

上述の議論は，そのままの形では一般化が難しいので $\sinh z = (e^{2z}-1)e^{-z}/2$ を用いて，一般論としては e^{P} の形の作用素について考察を行う。($\exp(-P)\exp P = 1$ に注意) 更にその解空間の考察には，[Lerchのζに対応する] $\vartheta(x,y|\tau)$ を導入して，その解析を経由する。その詳細については [4] を参照され度い。

さて，ここ迄話が来ると，概均質ベクトル空間に対するϑを，この枠組の中で定義することが出来るか？と云う問題が生じる。勿論，この場合Lerchのζは定義されているから，その逆Mellin変換を行って

$$\vartheta(x,y|g)$$

$$= \exp(\pi\sqrt{-1}\langle x,y\rangle)\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}\exp(2\pi\sqrt{-1}\langle \nu,y\rangle)\,\psi(P(g(x+\nu$$

但し，$P(x)$は相対不変式，$\psi(t)$はb函数

$$b(s) = b_0\, b_+(s)\, b_-(s) \quad \left(b_+(s) = \prod_{i=1}^{d}(s-c_i),\ b_-(s)\right.$$

$$\left(= (-1)^d \prod_{i=1}^{d}(s-(1-c_i-r)),\ b_0 \text{ は定数}\right.$$

を用いて

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\mathrm{Re}\, s=-\frac{r}{2}} \prod_{i=1}^{d}\Gamma(s+c_i+r)\ t_+^{-s-r}\,ds$$

により定める。又，g は $GL(V)$，或いは $GL(V)/G_0$ ($G_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \{g\in GL(V)\ ;\ P(gx)=P(x)\}$) の元。これにより g を lattice の変形のパラメタと見る。）を考えることはもっともらしく，又，実際，簡単な場合には $\vartheta(x,y|g) = \vartheta(-y,x|{}^tg^{-1})/\det g$ が成立つ（と思われる；収束性について厳密なチェックはしていない）ことからもそれは肯ける所であるが $\vartheta(0,0|g)$ は古典的な，$P(x)$ が 2 次型式になる場合を例外として，多分常に発散する。（而も，その発散の性質はかなり悪いと思われる。）この点をどのように考えるべきかは今後の面白い課題であろう。

文　献

[1] Ehrenpreis, L. and T. Kawai ; Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18-2, (In press.)

[2] Hecke, E. : Math. Ann. 111 (1936) 664-699 (Werke , pp 591-626)

[3] —— : Math. Z., 16 (1923), 301-307
(Werke, pp. 374-380)

[4] Sato, M., M. Kashiwara and T. Kawai : Linear differential equations of infinite order and theta functions. To appear in Adv. Math.